Øving 8

Martin T. Sandsmark
Gruppe 3

Oktober 2007

Kapittel 8

8.4

27

Bruker Warshalls algoritme. Du kan laste ned pythonprogrammet jeg lagde for å gjøre dette fra `http://iskrembilen.com/sandsmark/warshall.py`

a)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

29

$R = \{(1,2),(1,4),(3,3),(4,1)\}$

a) For å få den refleksiv, legger vi til: $(1,1),(2,2)$ og $(4,4)$ (diagonalen). For å få den transitiv legger vi til $(4,2)$ ($(4,1) \to (1,2)$). Resultatet blir $R_{rt} = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$

b) For å få den symmetrisk legger vi til $(2,1)$. For å få relasjonen nå til å bli transitiv legger vi til disse elementene: $(1,1),(2,1),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)$. $R_{st} = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$

c) Vi ser at relasjonen i b) er refleksiv (den har diagonalen), altså: $R_{rst} = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$

8.5

24

a) Denne mangler et element$(2,1)$ for å være symmetrisk, altså er den ikke en ekvivalensrelasjon.

b) Ja. Den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

b) Ja. Den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

56

a) $R_1 \cup R_2$. Vi kan ikke si at det er en ekvivalensrelasjon, fordi det ikke er sikkert at den er transitiv. Den er refleksiv (dersom alle diagonale elementer er med i de originale, er det også i den nye), og den er også symmetrisk, siden vi ikke har fjernet noen elementer, og alle elementer må ha vært symmetriske allerede.
Hvis vi sier at $\mathbf{S} = \{a, b, c\}, \mathbf{R_1} = \{\{a, b\}, \{c\}\}, \mathbf{R_1} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$. Da ser vi at vi mangler $\{a, c\}$, som ikke er med i unionen, for at den skal være transitiv.

b) $R_1 \cap R_2$. Den er fortsatt refleksiv, fordi alle de diagonale elementene må ha vært i begge utgangsrelasjonene. Den er også symmetrisk, siden at dersom et element har vært i begge relasjonene, må også "speilbildet" ha vært i begge relasjonene. Den er også transitiv, av samme årsak som den er symmetrisk (kravet for å være med i snittet gjør at kravet for at den skal være symmetrisk må være med).

c) $R_1 \oplus R_2$. Vi ser at denne aldri vil kunne være refleksiv, uansett hva R_1 og R_2 inneholder, altså vil den aldri heller kunne være ekvivalent.

8.6

10

Nei. Det mangler en fra c til b for at $a < c < d < b$. Den er refleksiv fordi det er sløyfer på alle punktene, og den er antisymmetrisk fordi det ikke er noen punkter som har kanter begge veier.

32

a) l og m (på toppen, ingen noder over).

b) a, b og c (på bunnen, ingen noder under).

c) l og m er på samme nivå, altså er det ikke noen noder som er størst.

d) Se b) og c).

e) Vi følger linjene opp fra a, b og c og kommer til $\underline{l, m \text{ og } k}$.

f) Det minste taket for a, b og c er k, siden k er mindre enn l og m.

g) Det finnes ingen noder som er mindre enn både f og g.

h) Siden det ikke finnes noen minstegrense, kan det heller ikke finnes noe tak.

36

a) Et veldig godt eksempel noen andre kom med, var alle naturlige tall, med relasjonen mindre enn eller lik, hvor det laveste elementet er en.

b) Igjen noen andres gode eksempel, er alle naturlige tall, med relasjonen større eller lik.

c) Alle heltall med relasjon mindre enn eller lik, er et eksempel.

46

Vi vet at for to elementer av S er taket under R den samme største nedre grensen for de samme elementene under R^{-1}. Altså må (S, R^{-1}) også være lattice.

48

Refleksiv: Den er refleksiv, $(A, C) \preceq (A, C)$, fordi $A \leq A$, og $C \subseteq C$.

Antisymmetrisk: Vi setter: $(A_1, C_1) \preceq (A_2, C_2)$ og $(A_2, C_2) \preceq (A_1, C_1)$. Da får vi at $A_1 \leq A_2, C_1 \subseteq C_2, A_2 \leq A_1, C_2 \subseteq C_1$.
Ergo er $A_1 = A_2, C_1 = C_2, (A_1, C_1) = (A_2, C_2)$. Vi sjekker transitivitet likt.

Dette viser at det er et posett. Så må vi finne øvre og nedre grense. Vi antar at $(A_1, C_1), (A_2, C_2) \in \mathbf{S}$. Vi sier at $(\min(A_1, A_2), (C_1 \cap C_2))$ er største nedre grense.
Per definisjon: $\min(A_1, A_2) \leq A_1, A_2$, og $(C_1 \cap C_2) \subseteq C_1, C_2$. Altså får vi at $(\min(A_1, A_2), (C_1 \cap C_2)) \preceq (A_1, C_1), (A_2, C_2)$, en nedre grense. Hvis A, C er en nedre grense, ser vi at $A \leq A_1, A_2$ og at $C \subseteq C_1, C_2$. $A \leq \min(A_1, A_2)$ og at $C \subseteq C_1 \cap C_2$ følger.
Altså får vi at den største nedre grensen må være:

$$(A, C) \preceq (\min(A_1, A_2), (C_1 \cap C_2))$$

Ved å følge samme metode kan vi bevise at $\max(A_1, A_2), C_1 \cup C_2$ er minste tak.

9

9.1

1

Se eget ark.

13

Se eget ark.

9.2

26

a) K_n. Vi ser at for K_1 vil det ikke være nok hjørner, men for K_2 er den bipartit. Dersom vi går over 2, vil den ikke være det, siden dersom vi da deler grafen inn i to disjunkte mengder må begge to inneholde minst to hjørner, og det vil da alltid være minst en kant mellom seg.

b) C_n. Per definisjon må n være større enn to. Den er derfor bipartit dersom n er større enn to og et partall, ubipartit dersom n er større enn to og et oddetall.

c) W_n. En graf som inneholder triangler, vil aldri være bipartit.

d) Q_n. Denne vil alltid være bipartit, per definisjon. Dersom vi deler den opp i to mengder, en med strenger med odde antall og en med partall antall enere. Det vil da ikke være mulig å ha kanter mellom hjørner i samme klasse, siden hjørnene som representerer strenger i hver klasse ikke kan være i samme posisjon.

47

a) $n \geq 1$

b) $n \geq 3$

c) $n = 1$

d) $n \geq 0$

48

Fordi m og n representerer antallet hjørner i hver sin del, må $m = n$ for at grafen $K_{m,n}$ skal bli regulær.

49

Vi bruker håndhilsningsteoremet, som sier at $2e = 4v$, hvor e er antall kanter, og v er antall hjørner. Setter vi inn 10 for e og gjør om, får vi at $v = 5$, altså må en tikantet graf ha 5 hjørner.

53

a) Den vil ha n hjørner og ingen kanter imellom.

b) Disjunkt union av K_n og K_m.

c) Hjørner $\{v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n\}$, med kanter mellom v_i og v_j, hvis ikke $i \equiv j \pm 1 \pmod{n}$.

d) Grafen vil ha hjørner representert ved binære strenger av lengde n med en kant imellom dersom strengene er forskjellige i mer enn en posisjon.